ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

ΘΕΩΡΙΑ

1^{ο} Θέμα

Α. **α)** Ποια αλγεβρική παράσταση ονομάζουμε ακέραια ;
β) Ποια αλγεβρική παράσταση ονομάζουμε μονώνυμο ;

Β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός ως προς x, y
$5x^3y^4$					
$\frac{3}{5}x^2y$					
y^2x^6					
$\frac{-xy^3}{2}$					
$\sqrt{5}\,xy^4$					

Γ. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Η παράσταση $\frac{2x}{\omega^2 y}$ είναι μονώνυμο με συντελεστή 2

β) Ο αριθμός 2014 είναι μονώνυμο

γ) Η παράσταση $\frac{1+x^3}{2}$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $\frac{1}{2}$

δ) Το μονώνυμο xy^2z δεν έχει συντελεστή

ε) Το κύριο μέρος του μονώνυμου $\alpha^2\beta^3\gamma^4$ είναι το $\alpha\beta\gamma$

στ) Η παράσταση $2xy - 3z$ δεν είναι μονώνυμο

ζ) Η παράσταση $(4+\sqrt{6})xy$ είναι μονώνυμο

2^{ο} Θέμα

Α. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 2, 1\}$ είναι ίσα

β) Αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{2, 3, 5\}$, τότε $B \subseteq A$

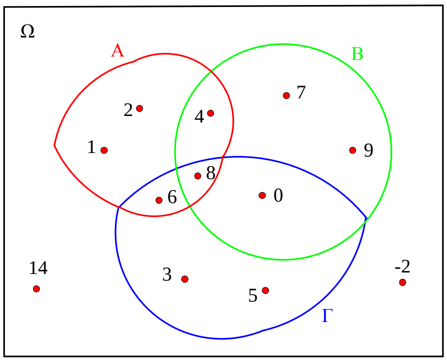
γ) Τα σύνολα $A = \{1, 5, 3\}$ και $B = \{153\}$ δεν είναι ίσα

δ) $A \cup A' = \Omega$

ε) $A \cap A' = \Omega$

στ) Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R},\ \text{όπου } 0x = 4\}$ είναι το κενό

Β.
Με την βοήθεια του διπλανού διαγράμματος του Venn να καθορίσετε τα παρακάτω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους
Ω, A, $A\cap B$, $B\cap\Gamma$, $(A\cap B)\cap\Gamma$, $A\cup B$, $(A\cup B)\cup\Gamma$, A', $(A\cup B\cup\Gamma)'$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η Άσκηση

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^2 + (x-1)^3 - x^3 + 7$

α) Να δείξετε ότι $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$

β) Να αναλύσετε το P(x) γινόμενο παραγόντων

γ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{P(x)}{2x^2-2}$

2η Άσκηση

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΑ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ, και ονομάζουμε Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι :

α) ΒΕ = ΓΔ

β) Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές

γ) $AM \perp B\Gamma$

3η Άσκηση

Να γίνουν οι πράξεις

α) $\left(\dfrac{1-4x+4x^2}{x^2-4} : \dfrac{2x-1}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x-2}{x+3}$ **β)** $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{2xy}{x^2-y^2} + \dfrac{y}{x-y}$

(ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ)

1ο Θέμα (απάντηση)

Α.α)
Ακέραια ονομάζουμε κάθε αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών της είναι σημειωμένες μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

Α.β)
Μονώνυμο ονομάζουμε κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών της είναι σημειωμένη μόνο οι πράξη του πολλαπλασιασμού

Β.

Με βάση την θεωρία ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός ως προς x , y
$5x^3y^4$	5	x^3y^4	$3^{ος}$	$4^{ος}$	$7^{ος}$
$\frac{3}{5}x^2y$	$\frac{3}{5}$	x^2y	$2^{ος}$	$1^{ος}$	$3^{ος}$
y^2x^6	1	y^2x^6	$6^{ος}$	$2^{ος}$	$8^{ος}$
$\frac{-xy^3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	xy^3	$1^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$
$\sqrt{5}\,xy^4$	$\sqrt{5}$	xy^4	$1^{ος}$	$4^{ος}$	$5^{ος}$

Γ.

Με βάση την θεωρία έχουμε
α) Λ (διαίρεση μεταξύ μεταβλητών)
β) Σ
γ) Λ (υπάρχει πρόσθεση μεταξύ του 1 και του x^3)
δ) Λ (συντελεστής είναι το 1)
ε) Λ (κύριο μέρος είναι το $\alpha^2\,\beta^3\,\gamma^4$)
στ) Σ
ζ) Σ

$2^{ο}$ Θέμα (απάντηση)

Α.

Με βάση την θεωρία έχουμε
α) Σ
β) Λ (το $5 \in B$ αλλά $\notin A$)
γ) Σ
δ) Σ
ε) Λ ($A \cap A' = \varnothing$)
στ) Σ

Β.

$\Omega = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 7,\ 9,\ 0,\ 3,\ 5, -2,\ 14\}$

$A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{4,\ 8\}$

$B \cap \Gamma = \{8 , 0\}$

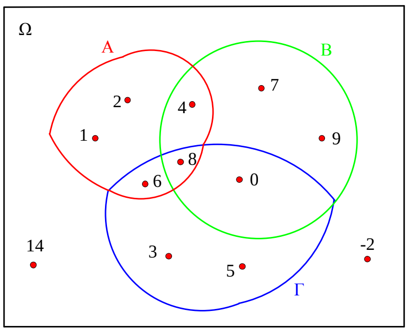
$(A \cap B) \cap \Gamma = \{8\}$

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8 ,\ 0 , 7 , 9\}$

$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 0 , 7 , 9\ \ 3, 5\}$

$A' = \{7,\ 9,\ 0,\ 3,\ 5, -2,\ 14\}$

$(A \cup B \cup \Gamma)' = \{-2 , 14\}$



1^{η} Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

$$P(x) = (x+1)^2 + (x-1)^3 - x^3 + 7 =$$
$$= x^2 + 2x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 7 =$$
$$= -2x^2 + 5x + 7$$

β)

Η διακρίνουσα του $P(x)$ είναι $\Delta = 81$

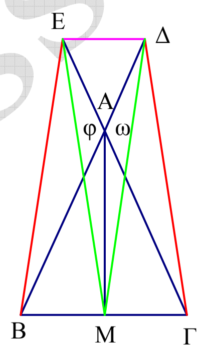
και οι ρίζες του $x_1 = \dfrac{-5+9}{-4} = -1$ και $x_2 = \dfrac{-5-9}{-4} = \dfrac{7}{2}$

Επομένως $P(x) = -2x^2 + 5x + 7 = -2(x+1)\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$

γ)

$$\frac{P(x)}{2x^2-2} = \frac{-2(x+1)\left(x-\frac{7}{2}\right)}{2(x^2-1)} = \frac{-2(x+1)\left(x-\frac{7}{2}\right)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{-x+\frac{7}{2}}{x-1} = \frac{-2x+7}{2(x-1)}$$

2^{η} Άσκηση (προτεινόμενη λύση)



α)

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν

ΑΒ = ΑΓ αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές

ΑΕ = ΑΔ από την υπόθεση

και $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (Π-Γ-Π)

Οπότε ΒΕ = ΓΔ

β)

Τα τρίγωνα ΕΜΓ και ΔΒΜ έχουν ΕΓ = ΒΔ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων

ΜΓ = ΒΜ

$\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (από το ισοσκελές ΑΒΓ)

Άρα είναι ίσα (Π-Γ-Π) , οπότε ΜΕ = ΜΔ , συνεπώς το τρ.ΜΔΕ είναι ισοσκελές

γ)

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος , άρα $AM \perp B\Gamma$

3^{η} Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

$$\left(\frac{1-4x+4x^2}{x^2-4} : \frac{2x-1}{x+2}\right)\cdot\frac{x-2}{x+3} = \left(\frac{(1-2x)^2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot\frac{x-2}{x+3} =$$
$$= \frac{(1-2x)^2(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+2)(2x-1)(x+3)} =$$
$$= \frac{(2x-1)^2(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+2)(2x-1)(x+3)} = \frac{2x-1}{x+3}$$

β)

$$\frac{x}{x+y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}=\frac{x}{x+y}+\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}+\frac{y}{x-y}=$$

$$=\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}+\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x(x-y)+2xy+y(x+y)}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x^2-xy+2xy+yx+y^2}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$$